



## To eksempler på anvendelse af stringermetoden og homogene spændingsfelter

**Kragh-Poulsen, Jens-Christian; Spangenberg, Jon; Sass, Michael Holtemann; Nielsen, Mogens Peter**

*Published in:*  
Bygningsstatistiske Meddelelser

*Publication date:*  
2009

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Kragh-Poulsen, J-C., Spangenberg, J., Sass, M. H., & Nielsen, M. P. (2009). To eksempler på anvendelse af stringermetoden og homogene spændingsfelter. *Bygningsstatistiske Meddelelser*, 80(1), 1-17.

---

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

*Årgang LXXX, Nr. 1, marts 2009*

---

# BYGNINGSSTATISKE MEDDELELSER

*udgivet af*

DANSK SELSKAB FOR BYGNINGSSTATIK

Proceedings of the Danish Society for Structural Science and Engineering

---

JENS-CHRISTIAN KRAGH-POULSEN, JON SPANGENBERG, MICHAEL  
HOLTEMANN SASS, MOGENS PETER NIELSEN

To eksempler på anvendelse af stringermetoden og homogene  
spændingsfelter .....1-17

KØBENHAVN 2009

*Eftertryk uden kildeangivelse ikke tilladt*  
*Copyright © 2009 "Dansk Selskab for Bygningsstatik", København*  
ISSN 0106-3715 (trykt udgave)  
ISSN 1601-6548 (online)

*Årgang LXXX, Nr. 1, marts 2009*

---

# BYGNINGSSTATISKE MEDDELELSER

*udgivet af*

DANSK SELSKAB FOR BYGNINGSSTATIK

Proceedings of the Danish Society for Structural Science and Engineering

---

JENS-CHRISTIAN KRAGH-POULSEN, JON SPANGENBERG,  
MICHAEL HOLTEMANN SASS, MOGENS PETER NIELSEN  
To eksempler på anvendelse af stringermetoden og homogene  
spændingsfelter.....1-17

KØBENHAVN 2009

## Redaktionsudvalg

Lars German Hagsten (Redaktør)  
Rasmus Ingomar Petersen  
Finn Bach  
Morten Bo Christiansen  
Mogens Peter Nielsen  
Sven Eilif Svensson

Artikler offentliggjort i Bygningsstatiske Meddelelser har gennemgået review.  
Papers published in the Proceedings of the Danish Society for Structural Science  
and Engineering have been reviewed.

## To eksempler på anvendelse af stringermetoden og homogene spændingsfelter

|   |                             |    |
|---|-----------------------------|----|
| 1 | Introduktion                | 1  |
| 2 | Teori                       | 2  |
| 3 | Rektangulær skive           | 6  |
| 4 | Indspændt rektangulær skive | 10 |
|   | Litteratur                  | 15 |
|   | Resume                      | 15 |
|   | Summary                     | 15 |



# To eksempler på anvendelse af stringermetoden og homogene spændingsfelter

Jens-Christian Kragh-Poulsen<sup>1</sup>

Jon Spangenberg<sup>2</sup>

Michael Holtemann Sass<sup>3</sup>

Mogens Peter Nielsen<sup>4</sup>

## 1 Introduktion

Ved beregning af armerede betonkonstruktioner efter plasticitetsteorien anvender man i reglen øvreværdisætningen eller nedreværdisætningen idet antallet af eksakte løsninger er beskedent. Øvreværdisætningen fører til løsninger, der, teoretisk set, er på den usikre side, mens nedreværdiløsninger, teoretisk set, giver sikre løsninger. Det er derfor nærliggende at søge at udvikle nedreværdiløsninger, der er-

---

<sup>1</sup> Civilingeniør

<sup>2</sup> Ph.d. studerende, Civilingeniør, DTU Mek

<sup>3</sup> Civilingeniør, ALECTIA

<sup>4</sup> Professor emeritus, Dr. Techn., DTU Byg



faringsmæssigt fører til et rimeligt armeringsforbrug og rimelige skøn for spændingerne i betonen.

Mange løsninger for plane spændingstilstande er baseret på stringermetoden eller homogene spændingsfelter i trekantsområder, se [2], [3] og [4]. For murværkskonstruktioner findes en del løsninger i [1]. Det teoretiske grundlag findes f. eks. i [5].

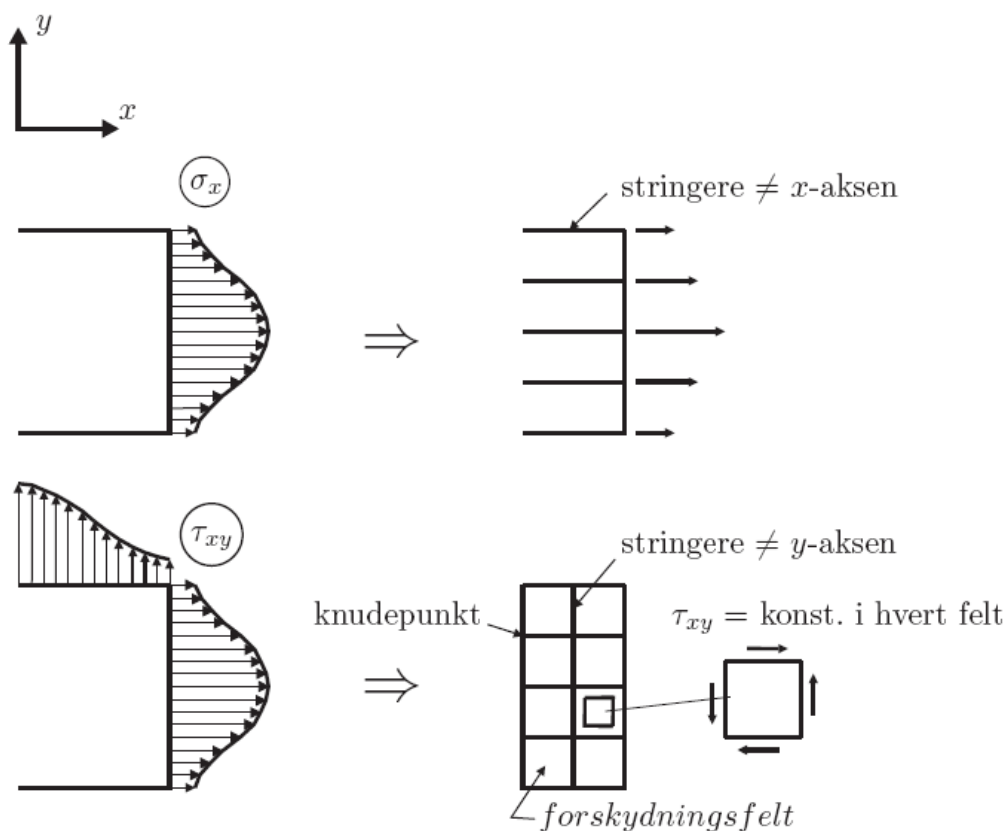
Denne artikel er udarbejdet i forbindelse med et specialkursus i plasticitetsteori på DTU Byg med Per Goltermann som kursusansvarlig og Mogens Peter Nielsen som forelæser. I artiklen gennemregnes en løsning, der er henvist til i [4], men som ikke er gennemregnet der. Løsningen anvendes på to simple tilfælde. I det ene tilfælde sammenlignes resultatet med stringermetoden.

## 2 Teori

### 2.1 Stringermetoden

Stringermetoden er som nævnt en nedreværdiløsning. Den tager udgangspunkt i Airys spændingsfunktion [1, Afsnit 4.2]. Stringermetodens grundlæggende princip er illustreret på figur 2.1, hvor normalspændingerne  $\sigma_x$  og  $\sigma_y$  optages af stængerne - stringerne - der er parallelle med henholdsvis  $x$ -retningen og  $y$ -retningen, og hvor forskydningsspændingerne  $\tau_{xy}$  optages i de mellemliggende forskydningsfelter.

Alle belastninger tænkes at angribe i skæringspunkterne - knudepunkterne - mellem stringerne. Herved kan forskydningsfelterne regnes at have konstante forskydningsspændinger. Stringerkræfterne vil derfor variere retlinet mellem knudepunkterne. Når spændingsfordelingen i et stringersystem skal bestemmes, sker det lettest ved først at bestemme forskydningsspændingerne, således at de er statisk tilladelige. Derefter er det muligt at bestemme stringerkræfterne ved ligevægtsligninger for de enkelte stringere. Efter at forskydningsspændingerne og trækkræfterne i stringersystemet er bestemt, kan den nødvendige armering findes. Ved armering af forskydningsfelterne anvendes armeringsformlerne, se afsnit 2.3.

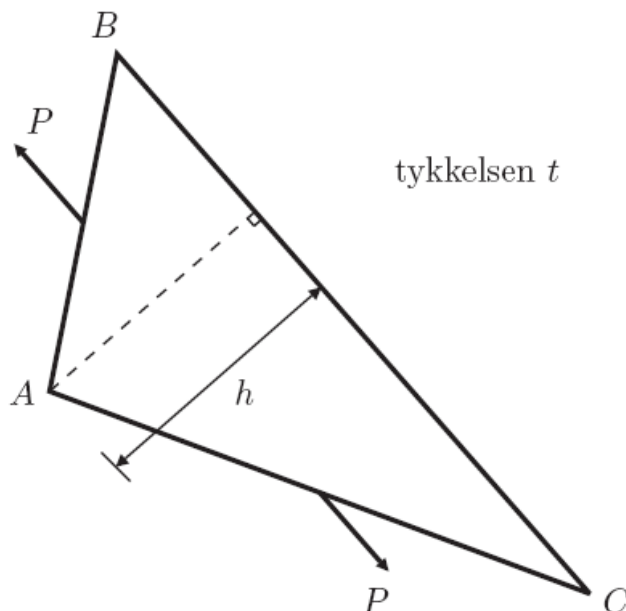


**Figur 2.1:** Spændingstilstande oversat til stringermetoden.

Det må naturligvis tilstræbes, at løsninger i statisk ubestemte tilfælde giver et armeringsforbrug, der ikke ligger for langt fra den optimale løsning (min. armeringsforbrug). Der er udarbejdet edb-programmer til bestemmelse af den optimale løsning f. eks. af Rambøll Gruppen.

## 2.2 Homogene spændingsfelter

Homogene spændingsfelter i trekantområder giver også en nedreværdiløsning. I eksemplet vist i figur 2.2 er et vægtløst trekantformet legeme påvirket af jævnt fordelte spændinger på de to af sidefladerne. Når de tilsvarende kræfter er i ligevægt, vil der eksistere en homogen spændingstilstand. I snit parallelle med trekantens sider vil der være de samme spændinger som på siderne. I figur 2.2 fås derfor en enakset trækspænding  $\sigma = P/ht$  for det vægtløse, trekantformede legeme.



**Figur 2.2:** Trekantformet homogent spændingsfelt, i vægtløst legeme.

Når spændingerne skal bestemmes i en skive ved hjælp af homogene spændingsfelter, indledes med at inddеле skiven i trekantformede områder. Derefter beregnes kræfterne på de enkelte skivedeles rande ved simple ligevægtsbetragtninger. Når alle kræfterne er bestemt, bestemmes de tilhørende spændinger f. eks. givet ved spændingskomponenterne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$  i et retvinklet  $x$ ,  $y$ -system. Efter at spændingerne er bestemt findes den nødvendige armering ved hjælp af armeringsformlerne, se afsnit 2.3.

Det er vigtigt at bemærke, at trekantinddelingen normalt ikke kan vælges vilkårligt. Man må altid sikre sig, at ligevægt er mulig for jævnt fordelte spændinger på alle trekantsider.

### 2.3 Armeringsformlerne

Bestemmelsen af armering i skiver kan ske ved anvendelse af armeringsformlerne, jvf. [2], [3] og [4]. De spændinger, der skal optages er  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$ . For bestemmelse af armeringen indlægges koordinatsystemet således, at  $\sigma_x \leq \sigma_y$ . I Formlerne betyder  $A_{sx}$  armeringen i  $x$ -retningen målt pr. længdeenhed i  $y$ -aksens retning. Analog betydning for  $A_{sy}$ . Flydespændingen for armeringen i de to retninger betegnes med hhv.  $f_{yx}$  og  $f_{yy}$ . Tykkelsen er  $t$ . Herved bliver  $A_{sx}/t$  og  $A_{sy}/t$  de geometriske armeringsforhold i armeringsretningerne. Normalspændingerne  $\sigma_x$  og  $\sigma_y$  regnes positive som trækspændinger. Betonspændinger betegnes  $\sigma_c$ , der regnes positiv som tryk.

Tilfælde 1:  $\sigma_x \geq -|\tau_{xy}|$

$$\frac{A_{sx}f_{yx}}{t} = \sigma_x + |\tau_{xy}| \quad (2.1)$$

$$\frac{A_{sy}f_{yy}}{t} = \sigma_y + |\tau_{xy}| \quad (2.2)$$

$$\sigma_c = 2|\tau_{xy}| \quad (2.3)$$

Tilfælde 2:  $\sigma_x < -|\tau_{xy}|$

Hvis også  $\sigma_y < 0$ , skal der kun armeres, når

$$\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2 \quad (2.4)$$

Armeringen bestemmes ved:

$$A_{sx} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{A_{sy}f_{yy}}{t} = \sigma_y + \frac{|\tau_{xy}^2|}{|\sigma_x|} \quad (2.6)$$

$$\sigma_c = |\sigma_x| \left( 1 + \left( \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \right)^2 \right) \quad (2.7)$$

Hvis det viser sig at  $\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$  bestemmes betontrykspændingen ved:

$$\sigma_c = \left| \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \right| \quad (2.8)$$

Formlerne giver optimal armering i tilfældet  $f_{yx} = f_{yy}$ . Formler for optimal armering i tilfældet  $f_{yx} \neq f_{yy}$  findes i [2]. Der begås dog normalt ingen større fejl ved at benytte ovennævnte formler generelt.

Armeringen kan alternativt bestemmes ved formlerne:

$$\frac{A_{sx}f_{yx}}{t} = \sigma_x + \gamma |\tau_{xy}| \quad (2.9)$$

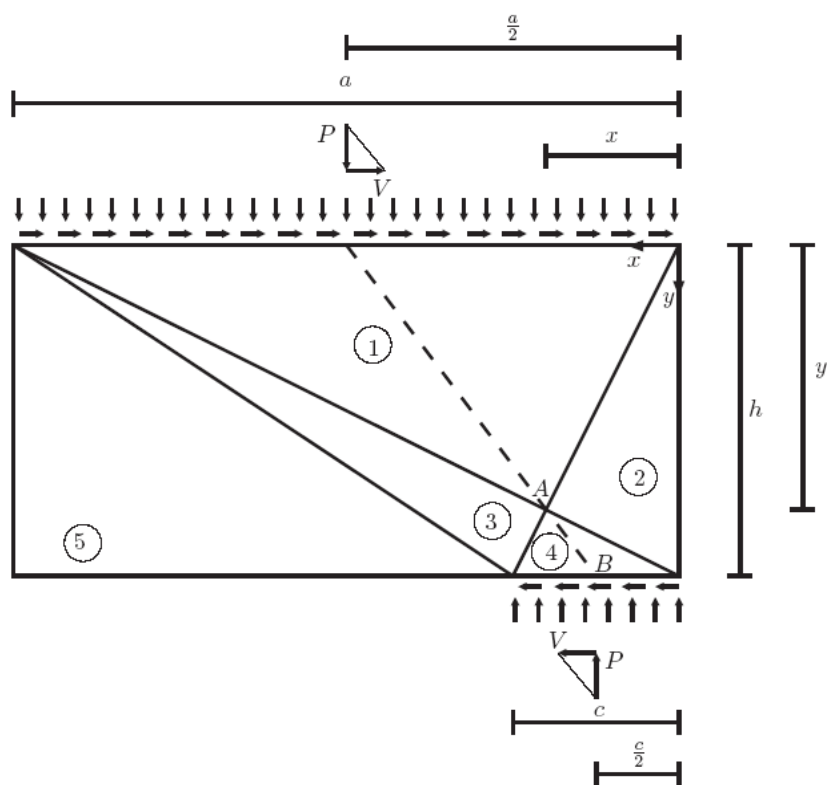
$$\frac{A_{sy}f_{yy}}{t} = \sigma_y + \frac{1}{\gamma} |\tau_{xy}| \quad (2.10)$$

$$\sigma_c = |\tau_{xy}| \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (2.11)$$

Hvor  $\gamma$  er en positiv parameter som kan vælges frit, men skal vælges så revnevidden ikke bliver for stor. Den kan bestemmes ud fra en kendt armering i den ene retning, se f. eks. [2, side 124] eller [3, side 208].

### 3 Rektangulær skive

En rektangulær skive er belastet med jævnt fordelte spændinger som vist på figur 3.1. For denne skive vil spændingerne kun blive beregnet ved hjælp af homogene spændingsfelter. Derefter vil den nødvendige armering blive bestemt for nogle karakteristiske tilfælde. Ved beregningerne ses der bort fra egenvægten. Tryklinjen er vist punkteret i figuren.



**Figur 3.1:** Skive opdelt i homogene spændingsfelter.

#### 3.1 Bestemmelse af det homogene spændingsfelt

Indledningsvist bestemmes det homogene spændingsfelt for det tilfælde, hvor punktet  $A$  på tryklinjen ligger som vist på figur 3.1. Efterfølgende findes de homogene spændinger for en vilkårlig placering af punktet  $A$  på tryklinjen.

Før spændingerne findes, skal alle tre ligevægtsligninger for det globale plane system være opfyldt. Lodret og vandret ligevægt ses umiddelbart at være opfyldt. En momentligning om  $B$  giver:

$$P\left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right) - Vh = 0 \quad (3.1)$$

Sammenhængen mellem  $P$  og  $V$  bliver derfor:

$$P = \frac{2Vh}{a-c} \quad \text{eller} \quad V = \frac{P(a-c)}{2h} \quad (3.2)$$

Kendes to af størrelserne  $P$ ,  $V$  og  $c$ , kan den nødvendige størrelse af den tredje findes. Det er naturligvis nødvendigt at  $c$  er tilstrækkelig stor, således at der ikke sker knusning af betonen. Betonspændingen skal opfylde betingelsen:

$$\sigma_c \leq \nu f_c \quad (3.3)$$

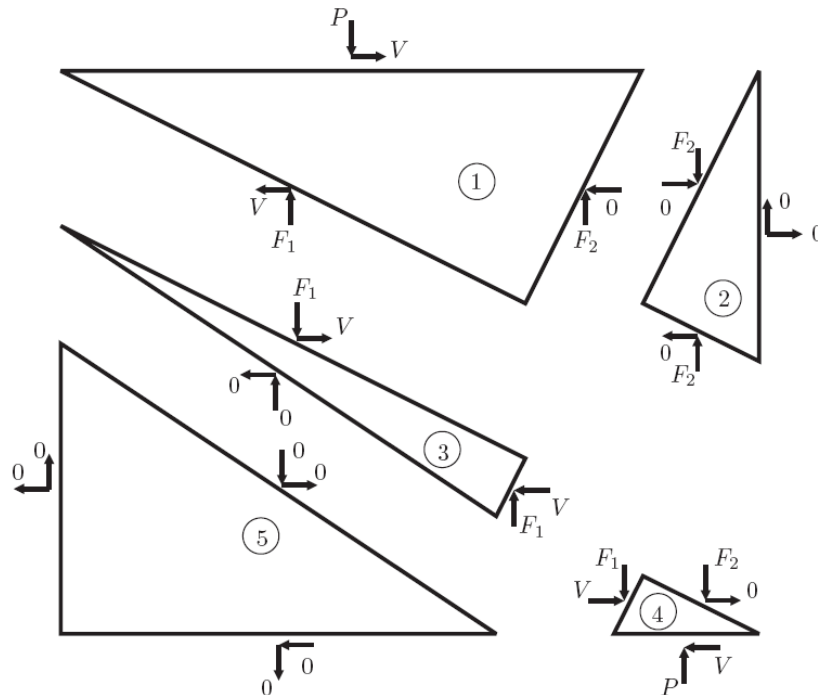
Hvor  $\nu$  er effektivitetsfaktoren. Formler for denne findes i [2].

### 3.1.1 Bestemmelse af spændingerne, tilfælde 1

Når  $A$  ligger, som vist på figur 3.1, findes følgende udtryk for  $x$  og  $y$ :

$$y = \frac{ah}{a+c}, \quad x = \frac{ac}{a+c} \quad (3.4)$$

På figur 3.2 er ligevægten for de enkelte trekanter illustreret.



**Figur 3.2:** Skive med kræfter på trekanterne med de homogene spændingsfelter.

Kræfterne  $F_1$  og  $F_2$  bestemmes ved momentligevægt lokalt for enten trekant 1 eller trekant 4.

Ved at betragte trekant 1 fås følgende.

$$F_1 = \frac{aP - hV}{a + c} \quad (3.5)$$

$$F_1 = \frac{aP - hV}{a + c} \quad (3.6)$$

Betragtes trekant 4 i stedet, fås udtryk for  $F_1$  og  $F_2$ , som umiddelbart afviger fra ovenstående. De er dog identiske pga. sammenhængen mellem  $P$ ,  $V$  og  $c$ , som beskrevet i formel (3.2).

Indsættes udtrykket for  $V$  i udtrykkene for  $F_1$  og  $F_2$  fås følgende simple resultat, uafhængigt af om trekant 1 eller 4 betragtes.

$$F_1 = F_2 = \frac{P}{2} \quad (3.7)$$

Det ses, at kræfterne på alle trekanter opfylder de tre ligevægtsbetingelser. Herefter kan spændingerne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$  bestemmes. Spændingerne fremgår af tabel 3.1, og er bestemt ved at betragte henholdsvis lodrette og vandrette snit i de enkelte trekanter.

| trekant | $\sigma_x$                 | $\sigma_y$             | $ \tau_{xy} $        |
|---------|----------------------------|------------------------|----------------------|
| 1       | $\frac{Vc}{ahc}$           | $-\frac{P}{at}$        | $\frac{V}{at}$       |
| 2       | 0                          | $-\frac{P(a+c)}{2act}$ | 0                    |
| 3       | $-\frac{V(a^2-c^2)}{ahct}$ | $-\frac{P(a+c)}{2act}$ | $\frac{V(a+c)}{act}$ |
| 4       | $-\frac{Va}{cht}$          | $-\frac{P}{ct}$        | $\frac{V}{ct}$       |
| 5       | 0                          | 0                      | 0                    |

**Tabel 3.1:** Spændingerne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$ .

### 3.1.2 Bestemmelse af spændingerne, tilfælde 2

For en vilkårlig placering af punktet  $A$  på tryklinjen bestemmes spændingerne på samme måde som i tilfælde 1.

De globale ligevægtsligninger er uændrede, og kræfterne  $F_1$  og  $F_2$  bestemmes fortsat ved at betragte momentligevægt lokalt for enten trekant 1 eller trekant 4. Ved at betragte trekant 1 fås følgende:

$$F_1 = \frac{P(x-a) - Vy}{a} \quad (3.8)$$

$$F_2 = \frac{Px + Vy}{a} \quad (3.9)$$

Ved simple geometriske betragtninger findes:

$$x = (c-a) \frac{y}{2h} + \frac{a}{2} \Leftrightarrow y = \frac{h(a-2x)}{a-c} \quad (3.10)$$

Indsættes det tidligere fundne udtryk for  $V$  og udtrykkene for  $x$  og  $y$  i udtrykkene for  $F_1$  og  $F_2$  fås som tidligere følgende simple resultat:

$$F_1 = F_2 = \frac{P}{2} \quad (3.11)$$

Når ligevægten for de enkelte homogene spændingsfelter er opstillet, kan spændingerne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$  findes. Disse spændinger fremgår af tabel 3.2.

| Trekant | $\sigma_x$            | $\sigma_y$       | $ \tau_{xy} $  |
|---------|-----------------------|------------------|----------------|
| 1       | $\frac{Vx}{ayt}$      | $-\frac{P}{at}$  | $\frac{V}{at}$ |
| 2       | 0                     | $-\frac{P}{2xt}$ | 0              |
| 3       | $-\frac{V(a-c)}{xht}$ | $-\frac{P}{2xt}$ | $\frac{V}{xt}$ |
| 4       | $-\frac{Vx}{c(h-y)t}$ | $-\frac{P}{ct}$  | $\frac{V}{ct}$ |
| 5       | 0                     | 0                | 0              |

**Tabel 3.2:** Spændingerne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$ .

### 3.2 Bestemmelse af den nødvendige armering

De fundne udtryk for spændingerne benyttes til at bestemme den nødvendige armering i de to tilfælde. Geometri, laster og styrker er fastlagt, og to placeringer af det variable punkt,  $A$ , er valgt. Det ene punkt er valgt svarende til tilfælde 1, hvor  $x < c$ . Det andet punkt er valgt således at  $y = h/2$ , hvilket medfører at  $x > c$ .

De benyttede data fremgår af tabel 3.3.



| Tilfælde | $P$<br>[kN] | $V$<br>[kN] | $f_c$<br>[MPa] | $f_y$<br>[MPa] | $a$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | $c$<br>[mm] | $t$<br>[mm] | $x$<br>[mm] | $y$<br>[mm] |
|----------|-------------|-------------|----------------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1        | 1040        | 936         | 50             | 500            | 5200        | 2600        | 520         | 100         | 472,73      | 2363,64     |
| 2        | 1040        | 936         | 50             | 500            | 5200        | 2600        | 520         | 100         | 1430        | 1300        |

**Tabel 3.3:** De benyttede data.

| Tilfælde 1                               |       |       |       |       |   | Tilfælde 2                               |       |      |       |       |   |
|--|-------|-------|-------|-------|---|--|-------|------|-------|-------|---|
| Trekant                                  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5 | Trekant                                  | 1     | 2    | 3     | 4     | 5 |
| $A_{sx} [\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}]$ | 0,396 | 0     | 0     | 0     | 0 | $A_{sx} [\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}]$ | 0,720 | 0    | 0     | 0     | 0 |
| $A_{sy} [\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}]$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0 | $A_{sy} [\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}]$ | 0     | 0    | 0     | 0     | 0 |
| $\sigma_c$ [MPa]                         | 3,62  | 11,00 | 46,64 | 47,70 | 0 | $\sigma_c$ [MPa]                         | 3,62  | 3,64 | 15,42 | 37,90 | 0 |

**Tabel 3.4:** Den nødvendige armering  $A_{sx}$  og  $A_{sy}$ , samt betonspændingen  $\sigma_c$ .

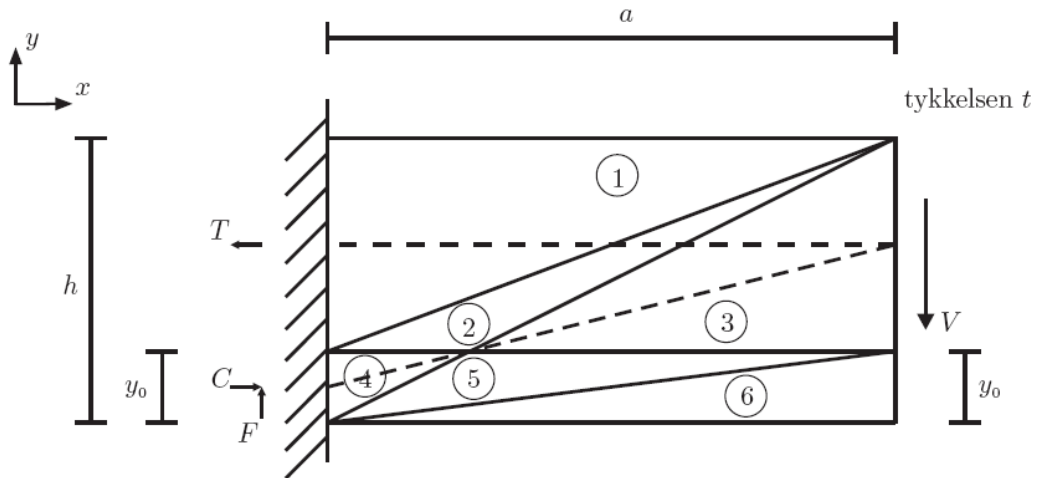
Resultaterne i de to tilfælde viser at punktet A's placering har indflydelse på armeringsmængden og det maksimale betontryk. Flyttes punktet op ad tryklinjen øges armeringsmængden mens betontrykket formindskes. Flyttes punktet nedad fås den modsatte udvikling. Herved kan en optimal position af punktet A findes ud fra økonomiske overvejelser. Typisk vil man stræbe mod en minimering af armeringsmængden, men dette vil resultere i et betontryk gående mod uendelig, hvorfor denne løsning ikke kan benyttes. Man kan f. eks. vælge løsningen svarende til at betontrykket netop opfylder betingelsen  $\sigma_c = \nu f_c$ .

## 4 Indspændt rektangulær skive

Dernæst betragtes en indspændt rektangulær skive. Skiven er belastet med en forskydningskraft  $V$  for enden. For denne skive vil spændingerne blive beregnet henholdsvis ved brug af homogene spændingsfelter og ved stringermetoden. Efterfølgende vil den nødvendige armering blive bestemt, og de to metoder vil blive sammenlignet for nogle karakteristiske tilfælde. Ved beregningerne ses der bort fra egenvægten.

### 4.1 Bestemmelse af spændingerne ved hjælp af homogene spændingsfelter

Der indledes med at bestemme spændingerne ved hjælp af homogene spændingsfelter, og derfor inddeles den indspændte rektangulære skive i trekanter, som vist på figur 4.1.



**Figur 4.1:** Skive med homogene spændingsfelter.

Figur 4.1 viser at der er en træk- og trykzone i indspændingstværsnittet. En momentligning om  $T$  giver:

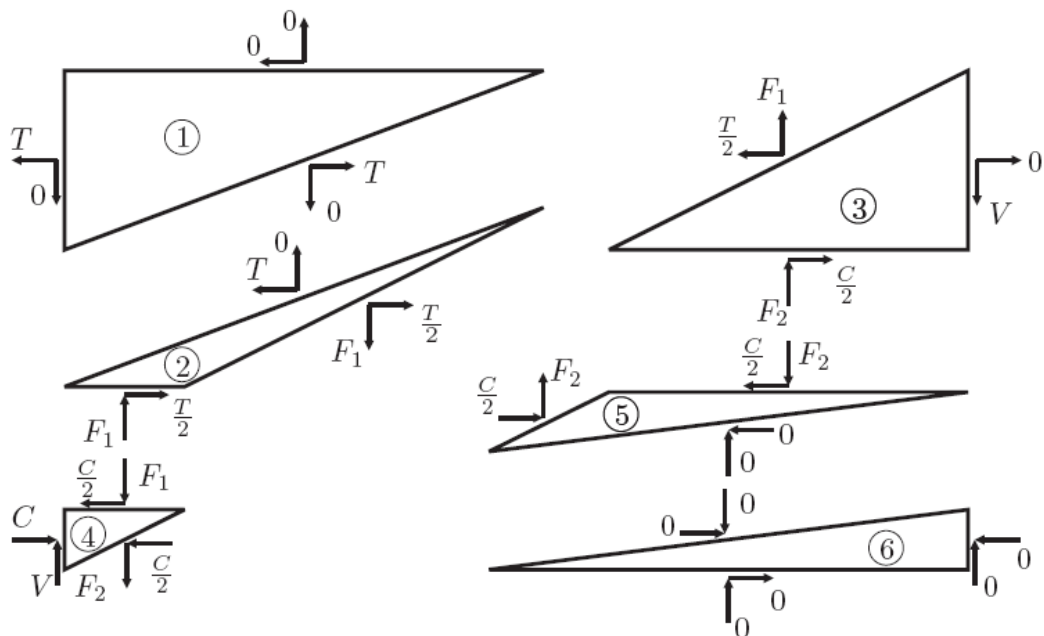
$$-C \left( \frac{y_0}{2} - \frac{h-y_0}{2} \right) + Va = 0 \Rightarrow C = \frac{2aV}{h} \quad (4.1)$$

Herefter giver lodret og vandret projekktion:

$$T = \frac{2aV}{h} \quad (4.2)$$

$$F = V \quad (4.3)$$

Derved er alle tre ligevægtsligninger for det globale system opfyldt, hvorefter ligevægten for de enkelte trekanter kan opstilles. På figur 4.2 ses fordelingen af kræfter på trekanterne. Det ses at alle trekanterne opfylder de tre ligevægtsligninger.



**Figur 4.2:** Skive med trekanter med homogene spændingsfordelinger.

Kræfterne  $F_1$  og  $F_2$  er bestemt til:

$$F_1 = V \left( 1 - \frac{y_0}{h} \right) \quad (4.4)$$

$$F_2 = V \frac{y_0}{h} \quad (4.5)$$

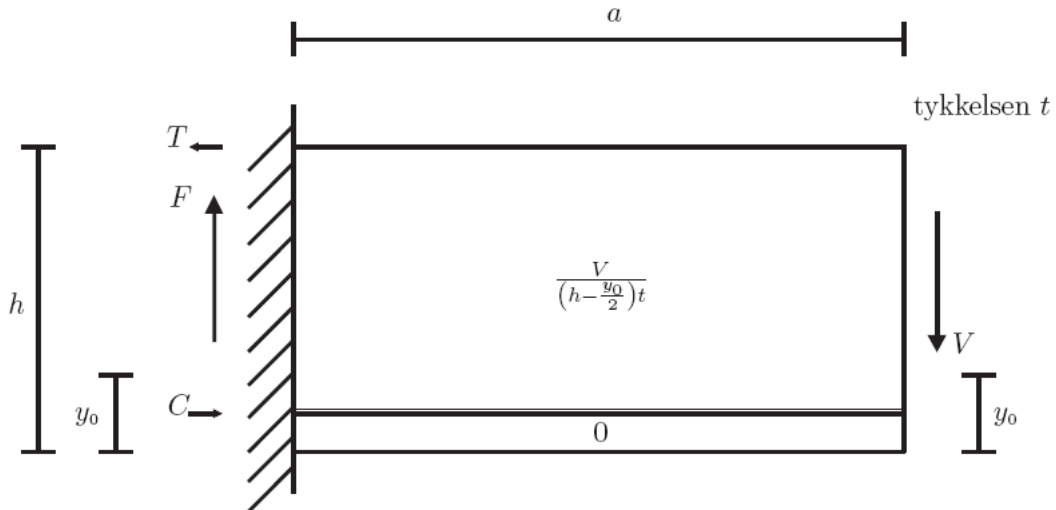
Spændingerne er vist i tabel 4.1.

| trekant | $\sigma_x$                               | $\sigma_y$                     | $ \tau_{xy} $          |
|---------|--|--------------------------------|------------------------|
| 1       | $\frac{2aV}{(h^2 - y_0 h)t}$             | 0                              | 0                      |
| 2       | $-\frac{V a(h - 2y_0)}{h y_0(h - y_0)t}$ | $-\frac{V(h - y_0)}{y_0 a t}$  | $\frac{V}{y_0 t}$      |
| 3       | 0  | $-\frac{V y_0}{(h - y_0) a t}$ | $\frac{V}{(h - y_0)t}$ |
| 4       | $-\frac{2aV}{h y_0 t}$                   | $-\frac{V(h - y_0)}{y_0 a t}$  | $\frac{V}{y_0 t}$      |
| 5       | $-\frac{aV}{(y_0 h - y_0^2)t}$           | $-\frac{V y_0}{(h - y_0) a t}$ | $\frac{V}{(h - y_0)t}$ |
| 6       | 0  | 0                              | 0                      |

**Tabel 4.1:** Spændingerne  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  og  $\tau_{xy}$ .

## 4.2 Bestemmelse af spændingerne ved hjælp af stringermetoden

Der placeres en vandret trækstringer i toppen af skiven, mens en vandret trykstringer placeres midt i en trykzone med højden  $y_0$ . I praksis vil trykstringeren ofte blive placeret i bunden af skiven.



**Figur 4.3:** Skive beregnet vha. stringermetoden. Trykstringeren er optegnet som en linje og trækstringerne som en enkelt kraftigt optrukket linje.

Først undersøges den globale ligevægt. Ved vandret projektion ses at  $T = C$ , og ved lodret projektion at den lodrette reaktion  $F = V$ . Størrelsen af  $T$  og  $C$  bestemmes ved at disse skal kunne optage det moment  $M$  der opstår ved indspændingen, og herved er momentligevægten også opfyldt. Dermed fås:

$$M = Va \quad (4.6)$$

$$T = \frac{M}{z} = \frac{Va}{h - \frac{y_0}{2}} \quad (4.7)$$

Størrelsen  $z$  er den indre momentarm i indspændingstværsnittet. Disse kræfter giver en konstant forskydningsspænding i det forskydningsfelt, som findes mellem tryk- og trækstringeren. Denne spænding er givet ved:

$$\tau = \frac{V}{\left(h - \frac{y_0}{2}\right)t} \quad (4.8)$$

### 4.3 Bestemmelse af den nødvendige armering

De fundne spændingsudtryk undersøges i et enkelt tilfælde med valgte værdier, som er vist i tabel 4.2.

| $V$   | $f_c$ | $f_y$ | $a$  | $h$  | $t$  | $y_0$ |
|-------|-------|-------|------|------|------|-------|
| [kN]  | [MPa] | [MPa] | [mm] | [mm] | [mm] | [mm]  |
| 422,5 | 30    | 500   | 3200 | 2600 | 100  | 520   |

**Tabel 4.2:** Valgte værdier for tilfældet vist i figur 4.3.

#### 4.3.1 Homogene spændingsfelter

Spændingerne i de enkelte trekanter bestemmes, og herefter bestemmes den nødvendige armering ved brug af armeringsformlerne. Resultatet er vist i tabel 4.3.

| trekant                    | 1    | 2     | 3     | 4     | 5     | 6 |
|----------------------------|------|-------|-------|-------|-------|---|
| $A_{sx} [\frac{mm^2}{mm}]$ | 1,00 | 0,126 | 0,406 | 0     | 0     | 0 |
| $A_{sy} [\frac{mm^2}{mm}]$ | 0    | 0,57  | 0,34  | 0     | 0     | 0 |
| $\sigma_c$ [MPa]           | 0    | 16,26 | 4,06  | 23,61 | 12,83 | 0 |

**Tabel 4.3:** Den nødvendige armering  $A_{sx}$  og  $A_{sy}$ , samt trykspændingen  $\sigma_c$ .

Det totale armeringsforbrug for begge retninger er beregnet til:

$$R = 13,06 \cdot 10^6 mm^3$$

Dette armeringsforbrug er beregnet ved at benytte de største armeringsarealer for henholdsvis x- og y-retningen, og forudsætte at disse anvendes over hele skiven. Dette gøres ofte i praksis, da der ofte benyttes færdig monterede armeringsnet.

#### 4.3.2 Stringermetoden

Ved stringermetoden fås henholdsvis en nødvendig trækarmering i toppen af skiven,  $A_{st}$ , og en nødvendig armering på grund af forskydningsspændingerne i forskydningsfeltet,  $A_{sx}$  og  $A_{sy}$ .

$$A_{st} = 1155,6 mm^2$$

$$A_{sy} = A_{sx} = 0,3612 \frac{mm^2}{mm}$$

Det totale armeringsforbrug ved konstant armering i trækstringeren er beregnet til:

$$R = 9,708 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Dette svarer til en reduktion af armeringsmængden på 25,7 % i forhold til løsningen med homogene spændingsfelter.

## Litteratur

- [1] Lars German Hagsten og M. P. Nielsen. *Murværk*. Forlaget Tegl, 2. udgave, 2005.
- [2] M. P. Nielsen. *Limit Analysis and Concrete Plasticity*. CRC Press., 2. udgave, 1998.
- [3] M. P. Nielsen. *Beton 1, Del 3, Bøjning med forskydning, toaksede spændingstilstande, søjler og bjælkesøjler, konstruktive regler, resumésamling*. BYG•DTU, 2. udgave, 2005.
- [4] M. P. Nielsen. *Beton 2, Del 4, Skiver og høje bjælker*. 1. udgave, Lyngby 2002.
- [5] M. P. Nielsen og A Rathkjen. *Mekanik 2.1, Plane spændings- og deformationsstilstande*. Den Private Ingeniørfond, Aalborg/København, 1979.

## Resumé

I denne artikel vises nogle løsninger baseret på plane homogene spændingsfelter i trekanter. To eksempler på anvendelse gennemregnes. I det ene eksempel betragtes en skive med påvirkninger svarende til, hvad man kan finde i en væg i en husbygningsskonstruktion. I det andet eksempel betragtes en indspændt skive. Dette eksempel gennemregnes også vha. stringermetoden. Eksemplerne afsluttes med bestemmelse af den nødvendige armering.

## Summary

In this paper solutions based on plane homogeneous stress fields in triangular areas is developed. Two examples illustrating possible applications are calculated. In one example a wall acted upon by forces which would be typical in a high rise building is considered. In the second example a wall with one free and one fixed end is treated. This example is also calculated by means of the stringer method. In both examples the calculation of the necessary reinforcement is determined

16 Jens-Christian Kragh-Poulsen et al. To eks. på anv. af stringermet. og hom.spændingsfelter

Artikel modtaget oktober 2009

Diskussion åben indtil marts 2010





## DANSK SELSKAB FOR BYGNINGSSTATIK

Anmodning om optagelse i selskabet indsendes til et af bestyrelsens medlemmer:

Mogens G. Nielsen (formand), Tlf. 45 98 60 00  
Rambøll, Bredevej 2, 2830 Virum

Henrik Nielsen (sekretær), Tlf. 33 41 33 33  
Vejdirektoratet, Niels Juels Gade 13, Postboks 9018, 1022 København K

Mads Nicolai Jensen (kasserer), Tlf. 88 19 10 00  
Alectia, Teknikerbyen 34, 2830 Virum

Henrik Mørup, Tlf. 48 10 42 00  
NIRAS, Sortmosevej 2, 3450 Allerød

Holger Koss, Tlf. 72 15 77 00  
FORCE, Hjortekærvej 99, Bygning 118, 2800 Kgs. Lyngby

Jeppe Jönsson, Tlf. 45 25 17 07  
BYG•DTU, Brovej, Bygning 118, 2800 Kgs. Lyngby

Lars Hauge, Tlf. 45 97 28 81  
COWI, Parallelvej 2, 2800 Kgs. Lyngby.

Per Alan Olsen, Tlf. 43 48 64 17  
Grontmij|Carl Bro, Granskoven 8, 2600 Glostrup

Selskabets formål er at arbejde for den videnskabelige udvikling af bygningsmekanikken - både teori for og konstruktion af alle slags bærende konstruktioner - fremme interessen for faget, virke for et kollegialt forhold mellem dets udøvere og hævde dets betydning overfor og i samarbejde med andre grene af ingeniørvidenskaben. Formålet søges bl.a. realiseret gennem møder med foredrag og diskussioner samt gennem udgivelse af "Bygningsstatistiske Meddelelser".

Som medlemmer kan optages personlige medlemmer, firmaer og institutioner, som er særligt interesserede i bygningsmekanik, eller hvis virksomhed falder indenfor bygningsmekanikkens område.

Det årlige kontingent er for personlige medlemmer 300 kr., for firmaer samt institutioner 1.800 kr. Studerende ved Danmarks Tekniske Universitet og andre danske ingeniørskoler samt indtil 2-års kandidater kan optages som juniormedlemmer uden stemmeret for et årskontingent på 80 kr. Pensionerede medlemmer med mindst 10 års medlemsanciennitet kan opnå status som pensionistmedlem med stemmeret for et årskontingent på 100 kr.

Selskabets medlemmer modtager frit "Bygningsstatistiske Meddelelser", der udsendes kvartalsvis. Endvidere publiceres "Bygningsstatistiske Meddelelser" på Selskabets hjemmeside [www.dsby.dk](http://www.dsby.dk). Manuskripter til optagelse i "Bygningsstatistiske Meddelelser" modtages af redaktøren.